Profesor
Aldo del Águila

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

NUMERACIÓN (PARTE I)

CONCEPTO:

Es la parte de la aritmética que se encarga del estudio de la correcta formación, lectura y escritura de números.

NÚMERO:

Ente matemático que nos permite cuantificar los elementos de la naturaleza. Nos da la idea de cantidad.

NUMERAL:

Es la representación simbólica de un número.

NUMERACIÓN (PARTE I)

PRINCIPIOS:

- **PRINCIPIOS DEL ORDEN:**

1	5	4	7	2
5° ORDEN	4° ORDEN	3° ORDEN	2° ORDEN	1° ORDEN

- **PRINCIPIOS DE LA BASE:**

Valores de la base: 2; 3; 4; 5;...

- **PRINCIPIOS DE LAS CIFRAS:**

BASE	SISTEMA	CIFRAS QUE SE USAN
2	Binario	0 y 1
3	Ternario	0; 1 y 2
4	Cuaternario	0, 1; 2 y 3
5	Quinario	0; 1 ; 2: 3 y 4

cifras < base

Primera cifra diferente de cero

Ejemplo:

47 953

Valor absoluto (VA): 7

Valor relativo (VR): 7 unidades de millar

NUMERACIÓN (PARTE I)

CAMBIOS DE BASE:

- **DE BASE «n» (n ≠ 10) A BASE 10:**

1) MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA:

Ejemplo:

Convertir $2341_{(5)}$ a base 10

$$2341_{(5)} = 2\,x5^3 + 3x5^2 + 4x5 + 1$$

$$2341_{(5)} = 346$$

2) MÉTODO DE RUFFINI:

Ejemplo:

Convertir $2341_{(5)}$ a base 10

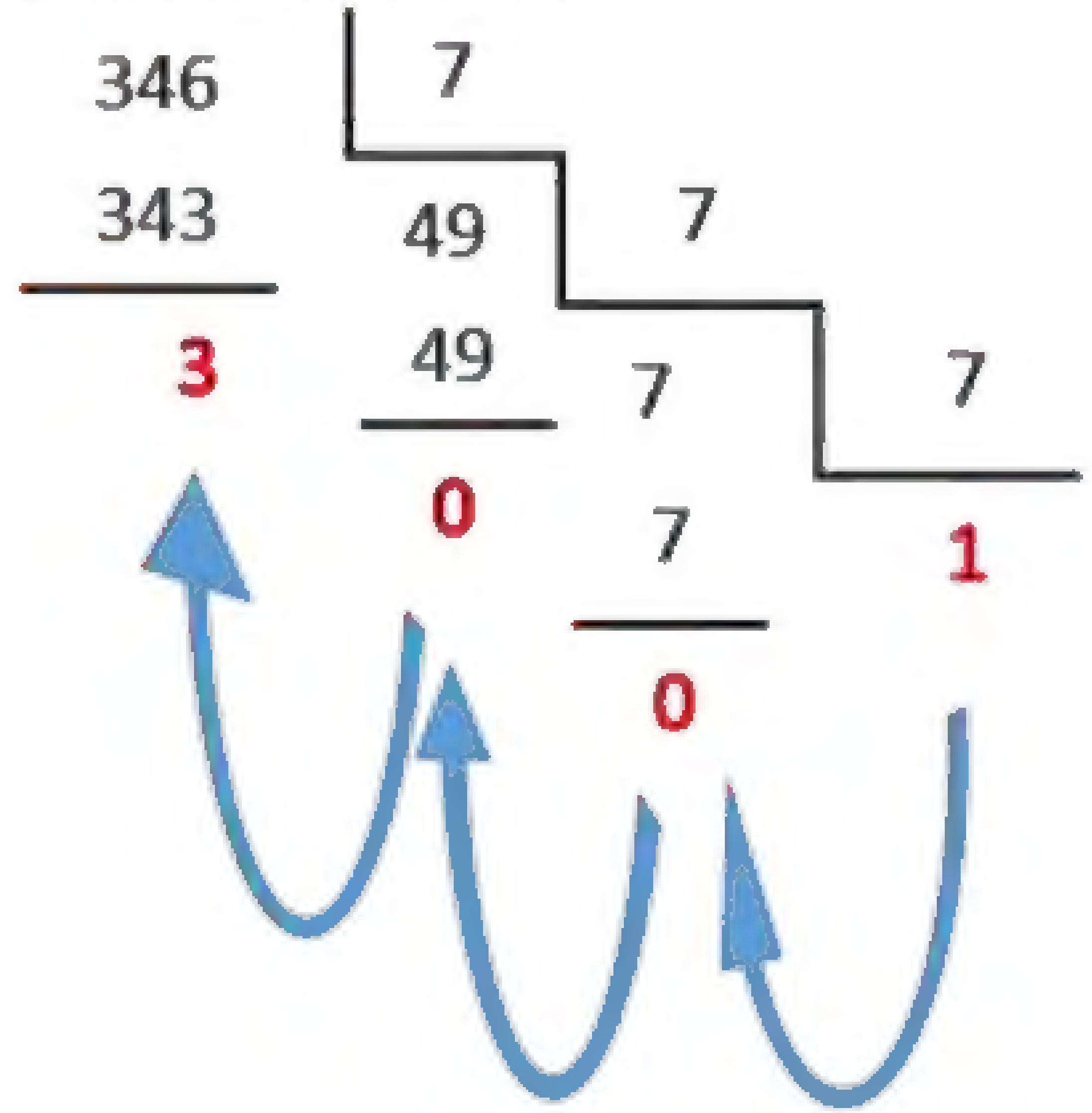
	2	3	4	1
5		10	65	345
	2	13	69	346

- **DE BASE 10 A BASE «n»: (n ≠ 10)**

MÉTODO DE DIVISIONES SUCESIVAS :

Ejemplo:

Convertir 346 a base 7



$$346 = 1003_{(7)}$$

Profesor
Aldo del Águila

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

PROPIEDADES:

1) NUMERAL DE BASES SUCESIVAS:

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\ddots_{\overline{1z}_{n}}}}} = n + a + b + c + \dots\dots\dots + z$$

Aplicación: * Calcular «n» si se cumple que:

$$24_{\underbrace{19_{19_{19_{\ddots_{19_{(n)}}}}}}_{24\text{ veces}}} = 558_{(9)}$$

SOLUCIÓN: Sea: $19_{\underbrace{19_{19_{\ddots_{19_{(n)}}}}}_{24\text{ veces}}} = E$

I $\quad 24_{E} = 558_{9}$

II $\quad 2E + 4 = 5x9^2 + 5x9 + 8$

$E = 227$

III $\quad$ Reemplazando E = 227

$$19_{\underbrace{19_{19_{\ddots_{19_{(n)}}}}}_{24\text{ veces}}} = 227$$

$$n + \underbrace{9 + 9 + 9 + \cdots + 9}_{24\text{ veces}} = 227$$

$n + 24x9 = 227$

$n = 11$

RESPUESTA 11

2) NUMERALES EQUIVALENTES:

$$\overline{abcd}_{(m)} = \overline{xyz}_{(n)}$$

$\overset{+}{\overline{abcd}}$ $\overset{-}{\overline{xyz}}$

$$\overset{+}{\overline{abcd}}_{\underset{-}{(m)}} = \overset{-}{\overline{xyz}}_{\underset{+}{(n)}}$$

➡ $m < n$

Aplicación: * Se sabe que: $\overline{2a6}_{(n)} = \overline{1bb}_{(8)}$

Calcular: a + b + n

I $\overset{+}{\overline{2a6}}_{\underset{-}{(n)}} = \overset{-}{\overline{1bb}}_{\underset{+}{(8)}}$

➡ $n < 8$

II Como: cifra < base ➡ $6 < n$

III $6 < n < 8$ ➡ $n = 7$

IV Reemplazando n = 7

$$\overline{2a6}_{(7)} = \overline{1bb}_{(8)}$$

Luego descomposición polinómica:

$2x7^2 + 7xa + 6 = 8^2 + 8b + b$

V $7a + 40 = 9b$

$7x2 + 40 = 9x6$

Como: cifra < base ➡ a=2 y b=6

$a + b + n = 15$

RESPUESTA 15

3) MÁXIMO NUMERAL:

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)\ldots\ldots(n-1)}_{(n)}}_{\text{k cifras}} = n^k - 1$$

Ejemplo:

- $555_{(6)} = 6^3 - 1$
- $33333_{(4)} = 4^5 - 1$
- $2222_{(3)} = 3^4 - 1$

Aplicación: **PRE SAN MARCOS 2019 I**

Si $\underbrace{\overline{bbb\ldots b}_{(b+1)}}_{\text{10 cifras}} = \overline{590cd}$, halle $b + c + d$

SOLUCIÓN:

Aplicando la propiedad máximo numeral:

$(b+1)^{10} - 1 = \overline{590cd}$

$(2+1)^{10} - 1 = 59048$

$b = 2$, $c = 4$ y $d = 8$

$b + c + d = 14$

RESPUESTA 14

NUMERACIÓN

4) EXISTENCIA DE UN NUMERAL:

Si N tiene «k» cifras en base «b», entonces:

$b^{k-1} \leq N < b^{k}$

Ejemplo:

Si N tiene 4 cifras en base 6, entonces:

$$\Rightarrow \quad 6^3 \leq N < 6^4$$

$$216 \leq N < 1296$$

Aplicación:

¿Cuántos números naturales se escriben con tres cifras tanto en base 9 como en base 11?

SOLUCIÓN:

I Como X tiene 3 cifras en base 9, entonces:

$$9^2 \leq X < 9^3 \quad \Rightarrow \quad 81 \leq X < 729 \text{ .....(a)}$$

II Como X tiene 3 cifras en base 11, entonces:

$$11^2 \leq X < 11^3 \quad \Rightarrow \quad 121 \leq X < 1331 \text{.....(b)}$$

III intersectando (a) y (b):

$$121 \leq X < 729$$

X : 121, 122; 123;...; 728

$$\boxed{\text{(Último término – primer término) + 1}}$$

728 – 121 + 1 = 608

RESPUESTA 608

CAMBIOS DE BASE ESPECIALES:

- **DE BASE n A BASE n^k:** $k \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo:

Convertir $\boxed{21}\boxed{011}\boxed{203}\boxed{121}_{(4)}$ a base 64 $\leftarrow$

$64 = 4^{3}$

$21_{(4)} = 2x4 + 1 = 9$

$011_{(4)} = 1x4 + 1 = 5$

$203_{(4)} = 2x4^2 + 3 = 35$

$121_{(4)} = 1x4^2 + 2x4 + 1 = 25$

$\Rightarrow 95(35)(25)_{(64)}$

- **DE BASE n^k A BASE n :** $k \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo:

Convertir $5972(31)_{(81)}$ a base 3 $\quad 81 = 3^{4}$

$5 = 12_{(3)}$

$9 = 0\,100_{(3)}$

$7 = 00\,21_{(3)}$

$2 = 000\,2_{(3)}$

$31 = 1011_{(3)}$

5 | 3
3   1
2

7 | 3
6   2
1

9 | 3
9   3 | 3
0   3   1
    0

31 | 3
30   10 | 3
1   9   3 | 3
    1   3   1
        0

$\Rightarrow 1201000021000210 11_{(3)}$

CEPREUNI 2019 II

1) Si $\overline{aaa}_{(a+2)} = 637_{(a+3)}$ Calcule el valor que toma a.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

PROPIEDAD NUMERALES EQUIVALENTES

$$\boxed{\overline{aaa}}_{(a+2)} = \boxed{637}_{(a+3)}$$

$$\overline{aaa} > 637$$

Si $a = 7 \longrightarrow 777_{(9)} = 637$

$\therefore a = 7$

$$\begin{array}{r|l} 637 & 9 \\ \hline 63 & 70 \;|\; 9 \\ 7 & 63 \quad 7 \\ & 7 \end{array}$$

CEPREUNI 2019 II

2) Si $\underbrace{\overline{aaa\ldots aa}_{(2)}}_{k\ \text{cifras}} = \overline{1xyz}$ Calcule el valor que toma a + x + y + z + k.

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

$a \neq 0$ $\qquad \overbrace{\overline{aaa\ldots a}}^{\text{K cifras}}{}_{(2)} = \overline{1xyz}$

$a = 1$ $\qquad \overbrace{\overline{111\ldots 1}}^{\text{K cifras}}{}_{(2)} = \overline{1xyz}$

PROPIEDAD: MÁXIMO NUMERAL

$$2^K - 1 = \overline{1xyz}$$

$K = 10$ $\qquad 2^{10} - 1 = \overline{1xyz}$

$$1023 = \overline{1xyz}$$

$x = 0$ $\quad y = 2$ $\quad z = 3$

CEPREUNI 2019 II

3) Sabiendo que $\overline{abab}_{(5)} = \overline{(a+b)3a}_{(9)}$ Calcule $\overline{ab}$ en base ocho y dar como respuesta la suma de cifras.

A) 6 ~~B)~~ 8 C) 10 D) 12 E) 14

$$\overline{abab}_{(5)} = \overline{(a+b)3a}_{(9)}$$

$$a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + a \cdot 5 + b = (a+b) \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + a$$

$$130a + 26b = 81a + 81b + 27 + a$$

$$\underbrace{48a}_{\overset{\circ}{3}} = 55b + \underbrace{27}_{\overset{\circ}{3}}$$

$55b = \overset{\circ}{3}$

$55 \neq \overset{\circ}{3}$

ENTONCES $b = \overset{\circ}{3}$

$\boxed{\text{CIFRA} < \text{BASE}}$

$a < 5$

$b < 5$

$48a = 55b + 27$

$b = 3 \rightarrow 48a = 55(3) + 27$

$a = 4$

LUEGO:

$\overline{ab} = 43$

$$\begin{array}{r|l} 43 & 8 \\ \hline 40 & 5 \\ 3 & \end{array}$$

$43 = 53_{(8)}$

PIDEN: $\therefore 5 + 3 = 8$

CEPREUNI 2019 II

4) Convertir el número: $N = 5 \times 8^5 + 20 \times 8^4 + 17 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 26 \times 8 + 11$

Al sistema de numeración de base ocho y dar como respuesta la suma de las cifras del número obtenido.

A) 26 B) 28 C) 52 D) 56 E) 82

$$5 \cdot 8^6 + 20 \cdot 8^4 + 17 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 26 \cdot 8 + 11$$

$$5(20)(17)3(26)(11)_{(8)}$$

$\boxed{\text{CIFRAS < BASE}}$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 8 \\ \hline 8 & 1 \\ 3 & \end{array}$$

$$5(20)(17)3(27)3_{(8)}$$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 8 \\ \hline 24 & 3 \\ 3 & \end{array}$$

$$5(22)1\ 6\ 3\ 3_{(8)}$$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 8 \\ \hline 16 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 22 & 8 \\ \hline 16 & 2 \\ 6 & \end{array}$$

$$7\ 6\ 1\ 6\ 3\ 3_{(8)}$$

EJEMPLOS:

CONVERTIR A BASE 13

$$2 \cdot 13 + 5 \cdot 13^4 + 8 \cdot 13^6 + 4$$

$$8 \cdot 13^6 + 0 \cdot 13^5 + 5 \cdot 13^4 + 0 \cdot 13^3 + 0 \cdot 13^2 + 2 \cdot 13 + 4$$

$$8050024_{(13)}$$

PIDEN: $7 + 6 + 1 + 6 + 3 + 3 = 26$

$\therefore 26$

5

CEPREUNI 2019 II

5) Calcule la suma de cifras de N al ser expresado en base diez, siendo

$N = \overline{aa}_b + \overline{ab}_c + \overline{(d+1)3d}_6 + \overline{bc0}_d$

A) 8 B) 9 C) 10 ~~D)~~ 11 E) 12

$\boxed{\text{CIFRAS} < \text{BASE}}$

$a \neq 0$ $\quad \overline{aa}_{(b)}$ $\quad \overline{ab}_{(c)}$ $\quad \overline{bc0}_{(d)}$ $\quad \overline{(d+1)3d}_{(6)}$

$a < b \quad b < c \quad c < d \quad d+1 < 6$

$\rightarrow d < 5$

$a \neq 0 \quad a < b < c < d < 5$

$\quad\quad\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3 \quad d = 4$

$\overline{aa}_{(b)} = 11_{(2)} \longrightarrow 11_{(2)} = 1 \times 2 + 1 = 3$

$\overline{ab}_{(c)} = 12_{(3)} \longrightarrow 12_{(3)} = 1 \times 3 + 2 = 5$

$\overline{(d+1)3d}_{(6)} = 534_{(6)} \longrightarrow 534_{(6)} = 5 \times 6^2 + 3 \times 6 + 4 = 202$

$\overline{bc0}_{(d)} = 230_{(4)} \longrightarrow 230_{(4)} = 2 \times 4^2 + 3 \times 4 = 44$

$N = 3 + 5 + 202 + 44$

$N = 254$

PIDEN: $\therefore 2 + 5 + 4 = 11$

CEPREUNI 2019 II

6) Si al expresar "E" en base "n" la suma de cifras es 17 donde:

$$E = 3n^6 - 3n^5 + 2n^3 + 3n - 2 \quad n > 2$$

Indique la suma de cifras de "E" al expresarlo en base "n^2".

A) 30 B) 45 C) 60 ~~D)~~ 80 E) 90

[illegible]: $n > 2$

[illegible] $+ 0.n^4$ [illegible] $+ 0n^2$ [illegible]

$2\,(n-2)\,0\,2\,0\,2\,(n-2)_{(n)}$

Suma de cifras $= 2 + n - 2 + 2 + 2 + n - 2 = 17$ [illegible]

$n = 8$

Ejemplo:

[illegible] $+ 0.7^3$ [illegible]

$3\,6\,0\,3\,5\,1_{(7)}$

$n = 8$

[illegible] Convertir a base 8^2

$2_{(8)} = 2$

$50_{(8)} = 5 \times 8 = 40$

$20_{(8)} = 2 \times 8 = 16$

$26_{(8)} = 2 \times 8 + 6 = 22$

$2\,(40)\,(16)\,(22)_{(64)}$

P. DEN: $2 + 40 + 16 + 22 = 80$

$\therefore 80$

7

CEPREUNI 2019 II

BASE 8

7) Si un número del sistema octal termina en 66. ¿En qué cifras termina en el sistema cuaternario?

A) 213 B) 231 C) 321 D) 312 E) 612

$E = \overline{ab\ldots\ldots66}_{(8)}$ CONVERTIR A BASE 4

i) CONVERTIR A BASE 2

$\overline{ab\ldots66}_{(8)}$ $8 = 2^3$

$6 = 110_{(2)}$

$6 = 110_{(2)}$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 6 & 3 \;|\; 2 \\ 0 & 2 \quad 1 \\ & 1 \end{array}$$

$\overline{ab\ldots66}_{(8)} = \overline{cd\ldots110110}_{(2)}$

ii) $\overline{cd\ldots110110}_{(2)}$ CONVERTIR A BASE $4 = 2^2$

$11_{(2)} = 1\cdot2+1 = 3$

$01_{(2)} = 0\cdot2+1 = 1$

$10_{(2)} = 1\cdot2 = 2$

$\overline{fg\ldots312}_{(4)}$

$\therefore$ 312

CEPREUNI 2019 II

8) ¿En cuántos sistemas de numeración se representa con 3 cifras, el siguiente número capicúa $\overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{c}{b}\right)a(b-2)}_{(5)}$?

A) 9 B) 8 C) 6 D) 2 E) 1

$$\overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{c}{b}\right)a\,(b-2)}_{(5)}$$ ES NUMERAL CAPICÚA

EJEMPLOS:

NÚMEROS CAPICÚAS

434	$\overline{aba}$
7227	$\overline{abba}$
59895	$\overline{abcba}$

• $\frac{a}{2} = b-2$

$a = 2(b-2)$

• $\frac{c}{b} = a$

$c = a \cdot b$

$c = 2(b-2) \cdot b$

$3 = (b-2)b$

$3 \quad (3-2)3$

$b = 3$

REEMPLAZANDO

$a = 2(b-2)$

$a = 2(3-2)$

$a = 2$

$a = 2$

$b = 3$

$$\overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{c}{b}\right)a\,(b-2)}_{(5)} = 1221_{(5)} = 1\times5^3 + 2\times5^2 + 2\times5 + 1$$

$$1221_{(5)} = 186$$

186 TIENE 3 CIFRAS EN BASE X

PROPIEDAD: EXISTENCIA DE UN NUMERAL

$$x^2 \leq 186 < x^3$$

$x = 6 \longrightarrow 6^2 = 36 \leq 186 < 216 = 6^3$

$x = 7 \longrightarrow 7^2 = 49 \leq 186 < 343 = 7^3$

$\vdots \qquad \vdots$

$x = 13 \longrightarrow 13^2 = 169 \leq 186 < 2197 = 13^3$

$x: \underbrace{6; 7; \ldots; 13}$

$\therefore$ 8 VALORES

CEPREUNI 2019 II

BASE 8

9) ¿Cuántos números de 3 cifras en base diez, se escriben con 3 cifras iguales en el sistema octal?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 6

$\overline{abc} = \overline{nnn}_{(8)}$

$\overline{abc} = n \cdot 8^2 + n \cdot 8 + n$

$\overline{abc} = 73n$

MÍNIMO MÁXIMO

$100 \leq 73n \leq 999$

$1,3 \leq n \leq 13,6$

$n: 2; 3; 4; \ldots; 13$

$\boxed{\text{CIFRA} < \text{BASE}}$

$n < 8$

$n: \underbrace{2; 3; 4; 5; 6; 7}_{\text{6 VALORES}}$

$\therefore$ 6 NÚMEROS

CEPREUNI 2019 II

10) La edad de un abuelo, es un número de dos dígitos distintos y la edad de su hijo tiene los mismos dígitos, pero en orden invertido, tiene dos nietos cuyas edades son tos dígitos de la edad del abuelo. La edad del padre es cinco veces la edad del mayor Calcule la relación de la edad del abuelo con a del nieto menor.

A) 13 B) $\frac{53}{13}$ ~~C)~~ 26 D) 39 E) $\frac{9}{2}$

$a > b$

EDAD DEL ABUELITO: $\overline{ab}$

EDAD DE PADRE: $\overline{ba}$

EDAD DEL NIETO MAYOR: a

EDAD DEL NIETO MENOR: b

DATO: $\overline{ba} = 5a$

$10b + a = 5a$

$10b = 4a$

$5b = 2a$

$\frac{5}{2} = \frac{a}{b}$ $a < 10$ $b < 10$

$a = 5 \quad b = 2$

$\overline{ab} = 52 \quad b = 2$

PIDEN: $\therefore \frac{52}{2} = 26$